

Universidad Nacional de Piura

Facultad de Ciencias Escuela Profesional de Física



**“Determinación de la Radiación de Frenado de partículas
Ultrarrelativistas en el Campo Eléctrico constante de un
Núcleo”**

Ejecutada

Br. Oscar David López Sullón.

Tesis para Optar el Título Profesional

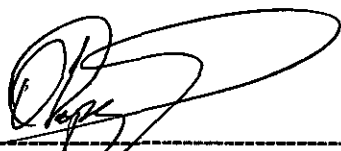
De Licenciado en Física

Piura - Perú

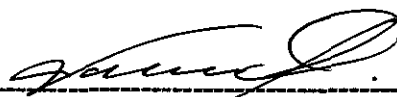
2016

Universidad Nacional de Piura
Facultad de Ciencias Escuela Profesional de Física

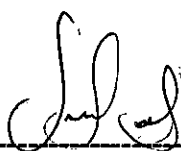
**“Determinación de la Radiación de Frenado de partículas
Ultrarrelativistas en el Campo Eléctrico constante de un
Núcleo”**



BR. Oscar David López Sullón.
TESISTA



MSC. José Noé Valdivia Rodas.
ASESOR



Lic. Ángel Carrasco Porras.
PRESIDENTE DE JURADO



Lic. Rudy Guiseppe Espinoza Nima.
SECRETARIO DE JURADO



Lic. Douglas Fidel Alvarado Paiva.
VOCAL DE JURADO

Piura - Perú
2015

A mis padres

ÍNDICE GENERAL

| | |
|---|----------------|
| RESUMEN | <i>Pag. 1</i> |
| ABSTRACT | <i>Pag. 2</i> |
| INTRODUCCIÓN | <i>Pag. 3</i> |
| CAPÍTULO I: | <i>Pag. 6</i> |
| 1. MECANICA RELATIVISTA | <i>Pag. 6</i> |
| 1.1. POSTULADO DE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD | <i>Pag. 6</i> |
| 1.2. TRANSFORMACIONES DE LORENTZ | <i>Pag. 7</i> |
| 1.3. CUADRIVECTORES | <i>Pag. 9</i> |
| 1.3.1. El 4-vector Posición | <i>Pag. 10</i> |
| 1.3.2. Tiempo propio τ | <i>Pag. 12</i> |
| 1.3.3. El 4-vector Velocidad | <i>Pag. 13</i> |
| 1.3.4. 4-vector Aceleración | <i>Pag. 14</i> |
| 1.3.5. El 4-vector Impulso | <i>Pag. 15</i> |
| 1.3.6. Energía Relativista | <i>Pag. 18</i> |
| CAPÍTULO II: | <i>Pag. 21</i> |
| 2. IMPULSO DE LA ENERGÍA DE RADIACIÓN | <i>Pag. 21</i> |
| 2.1. ORIGEN DE LA RADIACIÓN | <i>Pag. 21</i> |
| 2.2. IMPULSO EN UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO | <i>Pag. 22</i> |
| 2.3. RELACIÓN DE LA DENSIDAD DE IMPULSO Y EL VECTOR DE POYNTING | <i>Pag. 25</i> |
| CAPÍTULO III: | <i>Pag. 26</i> |
| 3. RADIACIÓN DE UN SISTEMA DE DOS PARTÍCULAS | <i>Pag. 26</i> |
| 3.1. RADIACIÓN DIPOLAR DE SISTEMAS SIMPLES | <i>Pag. 26</i> |
| 3.2. FLUJO DE ENERGÍA DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO EN COORDENADAS ESFÉRICAS | <i>Pag. 29</i> |
| 3.3. INTENSIDAD TOTAL DE RADIACIÓN | <i>Pag. 31</i> |
| 3.4. PÉRDIDA TOTAL DEL IMPULSO POR LA PARTÍCULA EMISORA | <i>Pag. 32</i> |

| | |
|--|-------------------|
| CAPITULO IV: | <i>Pag.34</i> |
| 4. RADIACIÓN EMITIDA POR UNA CARGA EN MOVIMIENTO | <i>Pag.34</i> |
| 4.1. PERDIDA DE ENERGÍA DE PARTÍCULAS ULTRARRELATIVISTAS QUE SE MUEVEN EN CAMPOS ELÉCTRICOS | <i>Pag.34</i> |
| 4.2. RADIACIÓN DE FRENADO DE PARTÍCULAS ULTRARRELATIVISTAS EN EL CAMPO ELÉCTRICO DE UN NÚCLEO | <i>Pag.38</i> |
| 4.3. CORRECCIONES MECANOCUÁNTICAS PARA LA RADIACIÓN DE FRENADO DE PARTÍCULAS ULTRARRELATIVISTAS EN EL CAMPO ELÉCTRICO DE UN NÚCLEO | <i>Pag.40</i> |
| 4.3.1. APLICACIONES DE LA RADIACIÓN DE FRENADO DE PARTÍCULAS ULTRARRELATIVISTAS | <i>Pag.43</i> |
| a. Pérdida de energía de los electrones rápidos por radiación | <i>Pag.43</i> |
| b. Rayos X | <i>Pag.44</i> |
| c. Altas Energías | <i>Pag.45</i> |
| d. Microcuásares | <i>Pag.46</i> |
| e. Sincrotrón | <i>Pag.48</i> |
| V. RESULTADOS | <i>Pag.51</i> |
| VI. CONCLUSIONES | <i>Pag.53</i> |
| VII. RECOMENDACIONES | <i>Pag.55</i> |
| VIII. BIBLIOGRAFÍA | <i>Pag.56</i> |
| Apéndice A | <i>Pag.58</i> |
| Apéndice B | <i>Pag.59</i> |

ÍNDICE DE FIGURAS

- Figura 1. Transformaciones de Lorentz. *Pag. 7*
- Figura 2. Superficie esférica en la donde a mayor r , la integral de superficie de los vectores del campos tenderán a cero. *Pag. 24*
- Figura 3. Representación del frente de ondas que se aleja del emisor, en coordenadas esféricas. *Pag. 29*
- Figura 4. Esquema de un electrón ultrarrelativistas frente al campo eléctrico generado por núcleo de un átomo. En la figura m y M son masas del electrón y núcleo respectivamente, y e y ze son cargas del electrón y núcleo respectivamente. *Pag. 38*
- Figura 5. A la izquierda, el frenamiento de un electrón en la colisión con el núcleo y a la izquierda el espectro de la radiación producto del enfrenamiento. *Pag. 44*
- Figura 6. Ilustración de una cascada electromagnética, con los fotones en azul y los e^{\pm} en color rojo. *Pag. 45*
- Figura 7. Un microcuásar con una estrella donante de gran masa. Se pueden distinguir los siguientes elementos: una estrella masiva, un objeto compacto en torno al cual se genera un disco de acreción debido al material que recibe de la estrella compañera, el campo de radiación de la estrella y sus vientos estelares, una corona de plasma muy caliente en torno al objeto compacto y jets perpendiculares al disco de acreción. *pag. 46*
- Figura 8. Esquema de un Sincrotrón de segunda generación. Los electrones se aceleran en dos etapas hasta llegar a su energía definitiva. *Pag. 48*
- Figura 9 a). La radiación emitida por una carga acelerada tiene la distribución respecto del ángulo acimut homogénea, formando una especie de rosquilla. *Pag. 49*
- Figura 9 b). La radiación emitida por una carga acelerada tiene la distribución respecto del ángulo acimut homogénea, formando una especie de cono cuya apertura disminuye con el aumento de la velocidad del electrón. *Pag. 49*

RESUMEN

En el presente trabajo de tesis se tiene como interés el estudio y análisis de la radiación originada de por la aceleración de un electrón ultrarrelativista al interactuar con el campo eléctrico de un núcleo, partiendo del análisis de la aproximación de la radiación dipolo eléctrico por tratarse de partículas con diferentes cargas se establece la intensidad total de radiación emitida en función de la aceleración y de la carga del proyectil (electrón), con el análisis mencionado anteriormente y la ayuda de herramientas de la teoría de la relatividad y electrodinámica, tales como son las transformadas de Lorentz, los cuadvectores, impulso, vector de Poynting y otros se establecen las ecuaciones que se emplean para determinar la pérdida de energía de partículas ultrarrelativista que se mueven en campos eléctricos y magnéticos. Y para el propósito del fin de este trabajo de tesis, es que es determinar la radiación de frenado en el campo eléctrico constante del núcleo se emplean las ecuaciones anteriormente mencionadas combinadas con dos modificaciones mecano-cuánticas tales como el carácter discreto de la transferencia de energía y el principio de incertidumbre, se establece que la pérdida de energía de un electrón relativista es directamente proporcional al número atómico del núcleo e inversamente proporcional a la distancia de acercamiento (parámetro de impacto). Esta ecuación mencionada anteriormente y en si toda la teoría de la radiación de frenado juega un rol muy importante en muchos campos de la física contemporánea, tales como la explicación del espectro continuo de los rayos X, la radiación cósmica procedente de sistemas binarios llamados micro cuásares, en altas energía explica el fenómeno denominado cascada electromagnética, ciclotrones y su ayuda para la comprensión de la ciencia, etc.

ABSTRACT

In this thesis work it is to interest the study and analysis of radiation caused by the acceleration of an ultra-relativistic electron interacting with the electric field of a nucleus, from the analysis of the approximation of the electric dipole radiation because it is particles with different charges the total intensity of radiation as a function of acceleration and load the projectile (electron) with the above analysis and the use of tools of the theory of relativity and electrodynamics, such as set forth are the Lorentz transformation, the four-vectors, momentum, Poynting vector and other equations that are used to determine the energy loss of ultrarelativistic particles moving in electric and magnetic fields are set. And so the purpose of this thesis is that it is determining the bremsstrahlung in the constant electric field of the nucleus the above equations combined with two quantum-mechanical modifications such as the discrete nature of the energy transfer are used and the uncertainty principle provides that the loss of energy of a relativistic electron is directly proportional to the atomic number of the nucleus and inversely proportional to the distance of approach (impact parameter). This equation mentioned above and whether the whole theory of bremsstrahlung plays an important role in many fields of modern physics, such as explaining the continuous spectrum of X-rays, cosmic radiation from binary systems called micro quasars in high energy explains the phenomenon called electromagnetic cascade, cyclotrons and help for understanding science, etc.

INTRODUCCIÓN

La radiación de frenado juega un papel importante en todas las ramas de la física: la física atómica y nuclear, la física del estado sólido, la física del plasma y la astrofísica. Cuenta con una amplia gama de aplicaciones en muchas áreas de la investigación experimental y teórico de la física. Esta radiación se debe a que cuando un electrón ultrarrelativista que pasa por delante de un núcleo experimenta una desviación muy pequeña. Su velocidad puede considerarse constante, y la aceleración, perpendicular a la velocidad. Producto de esta desviación se produce un la emisión de fotones, que se conoce como radiación de frenado. [1]

Hasta 1970, la radiación de frenado se consideró en el dominio de una aceleración de electrones en el campo de Coulomb estático apantallado de los núcleos objetivo. A inicios de 1970, varias personas [Buimistrov y Trakhtenberg (1975, 1977) y Amusia (1985)] tuvieron en cuenta la respuesta dinámica del átomo de destino, que puede ser polarizada por el electrón incidente y se produce la emisión de fotones. Este mecanismo de emisión de fotones de radiación de frenado se conoce como polarización. La radiación de frenado totales de amplitud es la suma de la radiación de frenado ordinario y radiación de frenado de polarización amplitudes. La radiación de frenado ordinario es el proceso por el cual el fotón es emitido por el electrón de desaceleración en el campo estático del átomo de destino. La radiación de frenado de polarización es el proceso por el cual el fotón es emitido por el blanco como resultado de su polarización por el paso del electrón incidente. [2]

En este trabajo vamos a estudiar la radiación de frenado ordinario que como se dijo es la transferencia de energía de radiación debida a la aceleración de una carga en el campo de Coulomb de otra carga que está en reposo. Este fenómeno se conoce también como Bremsstrahlung o Radiación Libre-Libre porque la produce una partícula cargada que está libre antes y después de la deflexión (aceleración) que produce la emisión. El tratamiento clásico está formado por un conjunto de aproximaciones, debidas fundamentalmente a Bohr, y realizadas en el primer cuarto del siglo XX. Un estudio más minucioso acarrea el tratamiento mecanocuántico relativista. Sin embargo, dentro de ciertos márgenes de validez, los resultados son bastante aceptables.

Básicamente, estudiaremos las colisiones de partículas cargadas a alta velocidad con otra partícula en reposo. Generalmente, denominaremos “proyectil” a la partícula incidente y “partículas objetivo”, o simplemente “objetivos”, a los componentes de la materia con la que interactúa. La situación más simple imaginable es que la materia consta de partículas de carga libre, electrones y núcleos. Esencialmente tendremos como proyectil a una partícula cargada, electrón, de masa m y carga e y como objetivo al núcleo en reposo de masa M ($M \gg m$) y carga Ze . Se toman partículas diferentes ya que el Bremsstrahlung debido a colisiones de partículas iguales (electrón-electrón, protón-protón) es cero en la aproximación dipolo eléctrico porque el momento dipolo $\sum e_i r_i$ es simplemente proporcional al centro de masa $\sum m_i r_i$, una constante de movimiento. Por lo tanto tenemos que considerar dos partículas diferentes. En el caso de bremsstrahlung de electrón-núcleo, los electrones son los radiadores principales, ya que las aceleraciones relativas son inversamente proporcionales a las masas, y las cargas son básicamente iguales. Como el núcleo es comparativamente masivo, hasta se puede tratar al electrón como una carga moviéndose en el campo Coulomb fijo del núcleo. [3]

Cuando un electrón con velocidad relativista que pasa por las proximidades de un núcleo experimenta una desviación muy pequeña, si se excluyen los procesos de colisión frontal (penetrar el blindaje de los electrones que están en órbita alrededor del núcleo), que por otra parte son poco probables. Puede demostrarse que, para velocidades comparables con la de la luz (momento muy alto), solo pueden ocurrir desviaciones apreciables cuando el parámetro de impacto ρ es del orden de $\frac{e^2}{mc^2}$. Este caso ya no puede tratarse clásicamente.

En estas condiciones podemos suponer, en primera aproximación, que la trayectoria de la partícula es rectilínea y que su velocidad es constante y que no es violentamente perturbado por la interacción, lo que equivale a despreciar la componente longitudinal del campo. Durante el tránsito en las proximidades del núcleo, el electrón se acelera debido a la fuerza de Coulomb y emite un pulso de radiación que se conoce como radiación de frenado y que con un análisis de la distribución discreta de la energía y del uso del principio de incertidumbre por tratarse de distancias interatómicas se obtiene una la expresión correcta para las velocidades cercanas a la de la luz (ultrarrelativistas). Por ello en el presente trabajo de tesis se realiza un análisis matemático de la pérdida de energía del electrón en función del campo eléctrico del núcleo atómico.

CAPÍTULO I

1. MECANICA RELATIVISTA

1.1. POSTULADO DE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

El resultado negativo del experimento de Michelson llevo a Einstein a reconsiderar los conceptos de partida de la fisica y, en primer lugar, las ideas acerca de las propiedades del espacio y el tiempo.

Como resultado, fundo la teoría de la relatividad, llamada también teoría de la relatividad especial. Dos principios o postulados se introdujeron como base de la teoría de la relatividad:

1) Las leyes de la naturaleza y los resultados de todos los experimentos realizados en un sistema de referencia determinado son independientes del movimiento de translación del sistema como conjunto. Más exactamente, existe un conjunto triplemente infinito de sistemas de referencia Euclídeos equivalentes que se mueven unos con respecto a otros en trayectorias rectilíneas y con velocidad constante en los cuales todos los fenómenos físicos ocurren de manera idéntica. Para abreviar, estos sistemas de coordenadas equivalentes se llama sistemas de referencia inerciales y las leyes de la fisica tienen forma invariante para todos los observadores inerciales.

2) La velocidad de la luz no depende del movimiento de la fuente. Este postulado, es la simplicidad misma, que nos dice de la constancia de la velocidad de la luz, es una constante invariante para todos los observadores inerciales.

A partir de estos postulados que fueron formulados por Einstein y de otros, que se recabarían en su caso, exigen la modificación de las leyes de la mecánica para movimientos a gran velocidad.

1.2. TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

Como se menciona anteriormente, la constancia de la velocidad la luz, independiente del movimiento de la fuente, da lugar a relaciones entre las coordenadas espaciales y temporal en diferentes sistemas inerciales, conocidos como transformaciones de Lorentz

Consideremos dos sistemas de referencia inerciales K y K' con velocidad relativa v entre sí. Las coordenadas espaciales y temporal de un punto en los sistemas K y K' son, respectivamente, (x, y, z, t) y (x', y', z', t') . los ejes de coordenada en los dos sistemas son paralelos y orientados de modo que K' se mueve en la dirección x positiva con velocidad v , visto desde K .

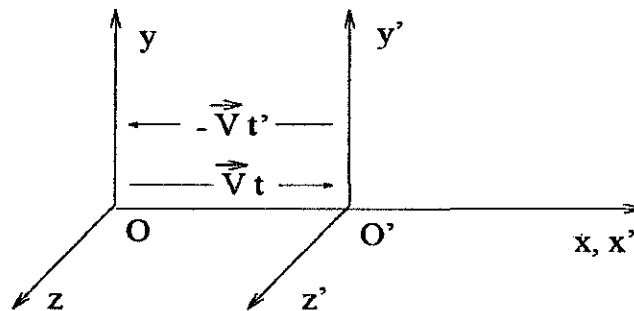


Figura 1. Transformaciones de Lorentz.

Por simplicidad supongamos que los orígenes de coordenadas de K y K' coinciden para $t = t' = 0$. Si una fuente de luz en reposo en el sistema K (y por tanto, moviéndose con velocidad v en la dirección negativa del eje x , vista desde K') emite

destellos rápidamente para $t = t' = 0$, el segundo postulado de Einstein implica que los observadores en ambos sistemas K y K' verán un frente esférico de radiación propagándose hacia fuera desde los orígenes respectivos con velocidad c . El frente de onda alcanza un punto (x, y, z) en el sistema K en un instante t dado por la ecuación

$$c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \quad (1.1)$$

Análogamente, en el sistema K' el frente de onda queda descrito por

$$c'^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0 \quad (1.2)$$

Con la hipótesis de que el espacio-tiempo es homogéneo e isótropo, tal como implica el primer postulado, la relación entre los dos conjuntos de coordenadas debe ser lineal. Entonces, las formas cuadráticas (1.1) y (1.2) estarán relacionadas por la ecuación

$$c'^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \lambda^2 [c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] \quad (1.3)$$

En la que $\lambda = \lambda(v)$ representa un posible cambio de escala entre los dos sistemas y cuyo valor es $\lambda(v) = 1$ para cualquier v y que las coordenadas espaciales y temporal en K' están relacionadas con las de K por las transformaciones de Lorentz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.4)$$

$$y' = y \quad (1.5)$$

$$z' = z \quad (1.6)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.7)$$

La transformación inversa es

$$x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.8)$$

$$y = y' \quad (1.9)$$

$$z = z' \quad (1.10)$$

$$t = \frac{t' - \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.11)$$

La importancia de las consecuencias que derivan de las transformaciones de Lorentz nos obliga a subrayar una vez más que el fundamento en que se apoyan es solamente el principio de la relatividad de Einstein, el principio de constancia de la velocidad límite de las interacciones y la hipótesis de la homogeneidad del espacio y del tiempo. Estos principios e hipótesis se encuentran confirmados hoy por una enorme cantidad de material experimental y su validez no ofrece dudas.

1.3. CUADRIVECTORES

El formalismo de la relatividad especial se generaliza mediante el uso de los cuadvectores. Los cuadvectores son generalizaciones de vectores espaciales, añadiendo una componente temporal físicamente asociada (la componente temporal $\tau = ict$ es una magnitud imaginaria pura cuya introducción pone en manifiesto el ligamen indisoluble entre el espacio y el tiempo). Los cuadvectores permiten modificar las leyes de la mecánica y electrodinámica clásica de manera consistente con los postulados de la relatividad. En particular, el requerimiento de que la velocidad de la luz sea independiente

del marco de referencia se cumple por la condición de invariancia, implícita en la construcción de los cuadvectores.

1.3.1. El 4-vector Posición

El cuadvector más elemental es el de posición el cual ubica un evento en el espacio y el tiempo. Este cuadvector tiene componentes r_1, r_2, r_3, r_4 , abreviadas como \vec{r}_α . El índice α toma siempre el valor cuatro, para la componente temporal y 1, 2, 3 para las tres componentes espaciales respectivas (las cuales a veces se abrevian con algún índice latino, j). El cuadvector posición (sería más correcto decir cuadvector de evento) contiene el tiempo y las coordenadas de un evento,

$$\vec{r}_\alpha = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ ct \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Por definición las transformaciones de Lorentz conservan la norma del cuadvector de posición y si podemos construir otros cuadvectores cuya norma sea una cantidad independiente del marco de referencia, estos conservan su significado físico en todo marco de referencia inercial. Las transformaciones de Lorentz se representan con matrices de la forma $\gamma_{\alpha\beta}$, quedando la transformación del sistema de referencia O al sistema de referencia O' como:

$$\vec{r}_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} \vec{r}'_\beta \quad (1.13)$$

En donde $\gamma_{\alpha\beta}$ es:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Generalizaremos la definición del vector \vec{r}_α al caso de un 4-vector arbitrario. Por definición se llama 4-vector \vec{a}_α a un conjunto de magnitudes (proyecciones) a_x, a_y, a_z, a_τ que en las transformaciones de Lorentz (giro de los ejes en el espacio cuatridimensional) se transforman de acuerdo con la misma ley que las componentes del vector posición \vec{r}_α , es decir, según la ley de la ecuación (1.13). Y limitándonos a los giros en el plano (x, τ) , y teniendo en cuenta la definición de $\gamma_{\alpha\beta}$, se puede escribir la ley de transformación en la forma:

$$a_x = \frac{a'_x - i\frac{v}{c}a'_\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.15)$$

$$a_y = a'_y, \quad a_z = a'_z \quad (1.16)$$

$$a_\tau = \frac{a'_\tau - i\frac{v}{c}a'_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.17)$$

Una característica importante de un 4-vector es el escalar que corresponde al cuadrado del mismo, es decir, al producto escalar:

$$a_\alpha^2 = a_\alpha a_\alpha = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + a_t^2 = \text{invariantes} \quad (1.18)$$

El cuadrado de un 4-vector, al igual que el cuadrado del cuadrivector posición r_α^2 , no es esencialmente positivo. Si el cuadrado de un vector $a_\alpha^2 > 0$, llamaremos a a_α , vector espacial. Un vector para el que $a_\alpha^2 < 0$ se llama vector temporal.

La invariancia de a_α^2 es desde luego clara por consideraciones geométricas: las transformaciones de Lorentz son giros en el espacio cuatro-dimensiones. La invariancia del cuadrivector de posición ante transformaciones de Lorentz da lugar a la definición del intervalo entre eventos.

1.3.2. Tiempo propio τ

El intervalo entre eventos es proporcional al tiempo medido por un observador que ve ambos eventos en la misma posición. Para este observador $dx = dy = dz = 0$, por lo que $ds^2 = -c^2 dt^2$. Definimos el tiempo propio, τ , como aquel medido por un observador “en reposo con un reloj”, es decir

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$
$$d\tau = \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.19)$$

El tiempo propio es una variable física unidimensional (escalar) cuya expresión es la misma en cualquier marco de referencia inercial, es decir un invariante

1.3.3. El 4-vector Velocidad

Hemos de construir un 4-vector velocidad talque resulte como derivada del 4-vector posición respecto de un cierto invariante (de un escalar). La elección de estén escalar viene determinada por la condición de que para velocidades pequeñas $v \ll c$ las componentes espaciales del 4-vector velocidad deben transformarse en las coordenadas de la velocidad ordinaria.

En virtud de lo dicho es natural definir el 4-vector velocidad por la relación:

$$\vec{u}_\alpha = \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt_0} \quad (1.20)$$

Para las componentes de la 4-vector tenemos:

$$u_x = \frac{dx}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.21)$$

$$u_y = \frac{dy}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.22)$$

$$u_z = \frac{dz}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.23)$$

$$u_\tau = \frac{d\tau}{dt_0} = \frac{icdt}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.24)$$

Cuando $v \ll c$ las tres componentes espaciales de la velocidad coinciden con las componentes de la velocidad tridimensional ordinaria. La cuarta componente u_τ de la velocidad es imaginaria pura. Salvo el factor ic , representa el coeficiente de transición del tiempo propio dt_0 al tiempo dt .

Una importante característica del 4-vector velocidad es la de sus componentes no son independientes entre sí. En efecto, formando el cuadrado del vector u_α^2 , se encuentra:

$$u_\alpha^2 = u_\alpha u_\alpha = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_t^2 = -c^2 \quad (1.25)$$

Así, pues, el 4-vector velocidad es un vector temporal y su valor absoluto es una constante dada. Esta propiedad del 4-vector está ligada, naturalmente, con el hecho de que la velocidad del movimiento de los cuerpos materiales no puede ser mayor que la velocidad de la luz.

1.3.4. 4-vector Aceleración

Definamos ahora la aceleración cuatridimensional \bar{w}_α por

$$\bar{w}_\alpha = \frac{d\bar{u}_\alpha}{dt_0} \quad (1.26)$$

Expresando \bar{w}_α en función de la velocidad \bar{v} y de la aceleración $\dot{\bar{v}}$, se encuentra para sus componentes:

$$w_x = \frac{du_\alpha}{dt} \frac{dt}{dt_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\dot{v}_x}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{v_x (\bar{v} \cdot \dot{\bar{v}})}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \quad (1.27)$$

$$w_y = \frac{\dot{v}_y}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{v_y (\bar{v} \cdot \dot{\bar{v}})}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \quad (1.28)$$

$$w_z = \frac{\dot{v}_z}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{v_z (\bar{v} \cdot \dot{\bar{v}})}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \quad (1.29)$$

$$w_\tau = \frac{d\tau}{dt_0} \frac{d}{dt} \left[\frac{ic}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] = \frac{i}{c} \frac{(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}})}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \quad (1.30)$$

Un cálculo fácil prueba que el cuadrado de la aceleración cuatridimensional es igual a

$$w_\alpha^2 = \frac{\dot{v}^2 - \frac{1}{c^2} [\dot{v}^2 v^2 - (\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}})^2]}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} = \frac{\dot{v}^2 - \left[\frac{\vec{v}}{c} \times \dot{\vec{v}}\right]^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} > 0 \quad (1.31)$$

Por consiguiente, la aceleración es un vector espacial.

Si se deriva la igualdad (1.25) respecto de t_0 , se halla

$$\bar{u}_\alpha \frac{d\bar{u}_\alpha}{dt_0} = \bar{u}_\alpha \bar{w}_\alpha = 0 \quad (1.32)$$

Esta última igualdad significa que los vectores u_α y w_α son ortogonales entre sí en el espacio de cuatro dimensiones.

1.3.5. El 4-vector Impulso

Definiremos el 4-vector impulso de una partícula, p_α por

$$\vec{p}_\alpha = m \bar{u}_\alpha \quad (1.33)$$

En donde las propiedades inerciales de la partícula se pueden caracterizar por el escalar m (masa en reposo, cuyo valor es característico para cada tipo de partículas elementales)

Las componentes de \vec{p}_α son:

$$p_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.34)$$

$$p_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.35)$$

$$p_z = \frac{mv_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.36)$$

$$p_\tau = \frac{icm}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.37)$$

En el caso límite de $v \ll c$ las tres componentes espaciales del impulso se reducen a las componentes ordinarias de la mecánica clásica. De aquí, al parecer, cabría deducir que el escalar m (masa en reposo) coincide con la masa de un cuerpo que se mueve con velocidad pequeña.

La energía de la partícula se define por la igualdad (apéndice B.8)

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.38)$$

Antes de pasar al análisis de la energía ε . Observemos la relación importante que liga la componente temporal de 4-vector impulso y la energía

$$p_\tau = \frac{i\varepsilon}{c} \quad (1.39)$$

De esta manera, p_τ coincide, salvo en un factor constante, con la energía de la partícula. La importancia de la igualdad (1.39) estriba en que, mediante ella, el impulso y la energía se unen formando un 4-vector, que se puede llamar 4-vector energía-impulso:

$$p_\alpha = \left(p_x, p_y, p_z, \frac{i\varepsilon}{c} \right) \quad (1.40)$$

Las componentes de 4-vector energía-impulso no son magnitudes relativísticamente invariantes. Tanto el impulso tridimensional como la energía resultan ser magnitudes relativas. Al pasar de un sistema inercial a otro, las componentes de 4-vector energía-impulso se transforman de acuerdo con las formulas (1.14)-(1.17), es decir,

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{\varepsilon'}{c^2} v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.41)$$

$$p_y = p'_y \quad (1.42)$$

$$p_z = p'_z \quad (1.43)$$

$$\varepsilon = \frac{p_\tau c}{i} = \frac{\varepsilon' + v p'_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.44)$$

Estas igualdades ponen de manifiesto que en las transformaciones de Lorentz la energía y las componentes del impulso se expresan una en función de otras. Ni la energía ni el impulso son, magnitudes invariantes, sino como siempre, el cuadrado del correspondiente 4-vector, es decir, la magnitud

$$p_\alpha^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + p_\tau^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} = \text{inva} \quad (1.45)$$

Sustituyendo en (1.45) los valores de las componentes del impulso (1.34)-(4.37) y de la energía (1.38), se puede calcular fácilmente el valor de este invariante, que resulta ser igual a:

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} = -m^2 c^2 \quad (1.46)$$

Así, pues, el 4-vector energía impulso es un vector temporal.

1.3.6. Energía Relativista

Volvamos ahora a la definición de la energía de una partícula (1.38)

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Cuando $v \ll c$ esta fórmula se transforma en

$$\varepsilon = mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.47)$$

El segundo sumando coincide con la energía cinética de la partícula en mecánica clásica. Sin embargo para $v = 0$ la energía de la partícula fuera de un campo de fuerza es

$$\varepsilon_0 = mc^2 \quad (1.48)$$

Resulta ser diferente de cero.

A primera vista cabría pensar que esta definición de energía es arbitraria dado que la energía resultante de la derivada de la ecuación diferencial del apéndice (B.7)

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + const \quad (1.49)$$

Si se elige para la constante arbitraria el valor de $(-mc^2)$, la energía así definida coincidirá para $v \ll c$ con la energía de la partícula en mecánica clásica.

Sin embargo, no podemos exigir a priori que todas las magnitudes de mecánica relativistas, sin excepción, se reduzcan a la forma clásica cuando $v \ll c$. Para la transformación (1.41) del impulso se reduzca al teorema de composición de velocidades de la mecánica clásica cuando $v \ll c$ debe cumplirse la condición $\varepsilon' = mc^2$. De esta condición, de (1.41) se sigue

$$P_x = P'_x + mv$$

O bien

$$v_x = v'_x + v$$

Si la energía ε' se definiera por la formula (1.49) y no por (1.38), de modo que cuando $v \ll c$ tendería el limite $\varepsilon' \rightarrow 0$ la transformación de Lorentz para la velocidad no pasaría a ser la fórmula de composición de las velocidades de la mecánica clásica.

Por consiguiente, la teoría de la relatividad conduce a una nueva conclusión muy importante: la energía de la partícula en reposo es igual a mc^2 . Es natural llamar a la cantidad mc^2 energía de reposo. Cualquier partícula o cuerpo que posea una masa en reposo m posee a la vez una energía en reposo igual a mc^2 .

Halleemos ahora la expresión que permita hablar de invariancia de la energía total por unidad tiempo entre dos sistemas inerciales. La intensidad total de la radiación se define como

$$I = -\frac{d\varepsilon}{dt} \tag{1.50}$$

Dado que el impulso total radiado por el sistema en el sistema de referencia en el que, en el sistema de la emisión, se encontraba en reposo es igual a cero es igual a cero, $P = 0$ (como se demostrara más adelante), entonces podemos reescribir la ecuación (1.44).

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' + vP'_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\varepsilon' + v(0)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.51)$$

Reemplazado (1.51) en (1.50) se tiene

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = -\frac{d\varepsilon'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{dt} \quad (1.52)$$

En virtud de la definición de tiempo propio y a la ecuación (1.19) se tiene

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ entonces } \frac{1}{dt} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt'}$$

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{dt'} = -\frac{d\varepsilon'}{dt'}$$

Y por consiguiente

$$I = -\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{d\varepsilon'}{dt'} = \text{invariante} \quad (1.53)$$

De esta manera, la intensidad total (energía radiada por unidad de tiempo) es un invariante.

CAPÍTULO II

2. IMPULSO DE LA ENERGÍA DE RADIACIÓN

2.1. ORIGEN DE LA RADIACIÓN

En la electrodinámica clásica, el electrón en movimiento uniforme no radia, para que este emita es necesario acelerarlo (por ejemplo, en un campo exterior). Desde el punto de vista de la teoría cuántica esta significa la posibilidad de que el electrón libre emita un fotón. En efecto, conforme al principio de conservación de la energía-impulso

$$P = P' + K \quad (2.1)$$

Donde P y P' son los 4-vector impulso del electrón de los estados inicial y final, K , es impulso del fotón. Elevando al cuadrado ambos miembros se tiene

$$P^2 = (P' + K)^2 = P'^2 + 2P'K + K^2 \quad (2.2)$$

En donde $P^2 = P'^2 = m^2$ (m es la masa del electrón), $K^2 = 0$ y $P'K = 0$, lo que es imposible, ya que $\omega = K_0 > 0$, tenemos entonces

$$P'K = \varepsilon' \omega (1 - \vec{V}' \cdot \vec{n}) > 0 \quad (2.3)$$

En virtud de $|\vec{V}'| < 1$ y $|\vec{n}| = 1$ (aquí $\vec{V}' = \vec{P}'/\varepsilon'$ es la velocidad del electrón, $\vec{n} = \vec{k}/\omega$, en vector en dirección del impulso del fotón)

Y por eso no puede disminuir. En cambio si el electrón se mueve en un campo exterior, su impulso ya no se conserva y se hace posible la radiación fotónica.

El impulso de un campo electromagnético es pequeño en condiciones ordinarias y su valor se encuentra a menudo más allá de los límites de los errores de medición. Sin embargo, en el dominio de los fenómenos atómicos el impulso del campo electromagnético llega a ser comparable con el impulso de las partículas y representa un papel de primer orden en todos los procesos de interacción de la radiación con la materia.

2.2. IMPULSO EN UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

Vemos así que una carga cualquiera que se mueve en un campo electromagnético con movimiento acelerado emite energía en forma de ondas electromagnéticas y sobre estas cargas actúa la fuerza de Lorentz. Las ecuaciones del movimiento de una carga se pueden escribir

$$\vec{F} = e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H} \right) \quad (2.4)$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H} \right) \quad (2.5)$$

La ley del movimiento (2.5) puede escribirse también para cargas distribuidas de modo continuo, si por \vec{P}_0 = impulso de partículas por unidad de volumen y la fuerza de Lorentz se sustituye por la densidad de fuerza (es decir, por la fuerza referida al volumen unidad). Entonces

$$\frac{d}{dt} \int \vec{P}_0 dV = \int \rho \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H} \right) dV \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \vec{P}_0}{\partial t} = \rho \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{H} \right) \quad (2.7)$$

El campo electromagnético no solo posee una densidad energía sino una densidad de impulso. Consideremos la variación del impulso que se encuentra en un volumen V . En virtud de la ecuación (2.6) tenemos

$$\frac{d\vec{P}_{part}}{dt} = \frac{d}{dt} \int \vec{P}_0 dV = \int \rho \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{H} \right) dV \quad (2.8)$$

En el caso de una distribución continua de carga la corriente se puede representar de la forma

$$\vec{J} = \rho \vec{V} \quad (2.9)$$

El vector densidad de corriente \vec{J} representa, evidentemente, la cantidad de carga que atraviesa en 1seg una superficie ideal de área unidad que se encuentra en el punto \vec{r} en el instante t y es perpendicular a \vec{J} . Reemplazando (2.9) en (2.8)

$$\frac{d\vec{P}_{part}}{dt} = \int \rho \vec{E} dV + \int \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{H} dV \quad (2.10)$$

Donde \vec{P}_{part} es el impulso total de las partículas.

Expresando ρ y \vec{J} de la ecuación (2.10) en función de las intensidades del campo de acuerdo con las ecuaciones de Maxwell-Lorentz, apéndice A.7 – A.8. La ecuación resultante es:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}_{part}}{dt} &= \frac{1}{4\pi} \int \vec{E}(\nabla \cdot \vec{E}) dV - \frac{1}{4\pi c} \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{H} dV + \frac{1}{4\pi} \int (\nabla \times \vec{H}) \times \vec{H} dV \\ \frac{d\vec{P}_{part}}{dt} &= -\frac{1}{4\pi c} \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{H} dV + \frac{1}{4\pi} \int [\vec{E}(\nabla \cdot \vec{E}) + (\nabla \times \vec{H}) \times \vec{H}] dV \end{aligned} \quad (2.11)$$

Simetricemos la última ecuación sumando al segundo miembro la expresión idénticamente nula, que se obtiene de las ecuaciones del apéndice (A.5) – (A.7). La ecuación resultante es:

$$\frac{1}{4\pi} \left(\nabla \times \vec{E} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \times \vec{E} + \frac{1}{4\pi} \vec{H} (\nabla \cdot \vec{H})$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}_{part}}{dt} = & -\frac{1}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int \vec{E} \times \vec{H} dV \\ & + \frac{1}{4\pi} \int \{ \vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) + \vec{H} (\nabla \cdot \vec{H}) - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) - \vec{H} \times (\nabla \times \vec{H}) \} dV \end{aligned} \quad (2.12)$$

La segunda integral puede transformarse en una integral de superficie. Es claro que una integral de superficie cuyo integrando es de segundo grado respecto de los vectores del campo tenderá a cero, cuando la superficie crece tendiendo a infinito, con tal que dicho vectores disminuyan más rápidamente que la función $1/r$.

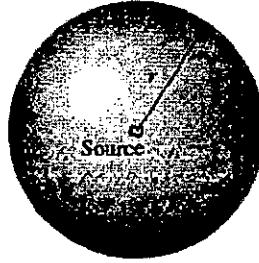


Figura 2. Superficie esférica en la donde a mayor r , la integral de superficie de los vectores del campos tenderán a cero.

Entonces, pasando a un volumen infinitamente grande y prescindiendo en (2.12) de la segunda integral, llegando a la expresión

$$\frac{d\vec{P}_{part}}{dt} + \frac{1}{4\pi c} \int \vec{E} \times \vec{H} dV = const. \quad (2.13)$$

La ecuación (2.13) prueba que el impulso total de un sistema cerrado constituido por un campo y por partículas se conserva.

2.3. RELACIÓN DE LA DENSIDAD DE IMPULSO Y EL VECTOR DE POYNTING

La magnitud

$$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c} \vec{E} \times \vec{H} \quad (2.14)$$

Representa la densidad de impulso (impulso por unidad de volumen) del campo electromagnético. En la interacción del campo y las partículas a la par de la ley de conservación de la energía total se cumple la ley de conservación del impulso total. La transferencia de impulso a las partículas va acompañada de una disminución del impulso del campo. La pérdida de impulso por parte de las partículas (por ejemplo, en la emisión de radiación) conduce al aumento del impulso del campo.

Vector de Poynting, igual a:

$$\vec{\sigma} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} \quad (2.15)$$

Representa el flujo de energía del campo que atraviesa 1cm^2 en la orientación perpendicular a los vectores del campo \vec{E} y \vec{B} .

De la ecuación, vector densidad de impulso (2.14) y el vector de Poynting (2.15) se puede obtener la relación

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{\sigma} \quad (2.16)$$

Vemos así que un sistema emisor no solamente pierde energía al radiar, sino, también impulso los cuales se transforman en energía e impulso del campo de radiación.

CAPÍTULO III

3. RADIACIÓN DE UN SISTEMA DE DOS PARTÍCULAS

3.1.RADIACIÓN DIPOLAR DE SISTEMAS SIMPLES

Como ya se mencionó con anterioridad. El estudio de este trabajo de tesis, analizaremos la radiación de un dipolo simple, por ser la representación de un sistema de dos cargas diferentes que para una carga aislada que adquiere una aceleración debido a una fuerza \vec{F} , podemos escribir el momento dipolar del sistema.

$$\vec{d} = e\vec{r} \quad (3.1)$$

Donde e es la carga total del sistema y \vec{r} es el vector que define el punto de observación. Derivando la ecuación (3.1) 2 veces se tiene:

$$\ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}} = e\vec{w} \quad (3.2)$$

Donde \vec{w} es la aceleración con que se mueve la carga. Por ello, el flujo de energía del campo electromagnético se caracteriza por el vector $\vec{\sigma}$, llamado vector de poynting, igual a

$$\vec{\sigma} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} \quad (3.3)$$

Vemos que los vectores \vec{E} y \vec{H} están ligados entre sí por la igualdad

$$\vec{E} = \vec{H} \times \vec{n} \quad (3.4)$$

Donde \vec{n} es el vector unitario $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$. Reemplazando (3.4) en (3.3) y usando la ecuación (A.2) del apéndice se tiene

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} &= \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi} (\vec{H} \times \vec{n}) \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \vec{H}^2 \vec{n} \\ \vec{\sigma} &= \frac{c}{4\pi} \vec{H}^2 \vec{n}\end{aligned}\quad (3.5)$$

Por definición se tiene que el vector campo magnético \vec{H} es siempre solenoidal y su divergencia es igual a cero por lo que se tiene:

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A} \quad (3.6)$$

Donde el potencial vector $\vec{A}(\vec{r}, t)$ es función de punto y de tiempo. Además el potencial vector en función de la densidad de corriente \vec{j} es:

$$\vec{A} = \frac{1}{cr} \int \vec{j}(\vec{r}', \tau) dV' \quad (3.7)$$

La ecuación (3.7) pone de manifiesto que el potencial del campo en un punto de observación que se encuentra a una distancia r del origen de coordenadas, viene determinado, en el instante t , por el valor de la carga en el instante anterior $\tau = t - \left(\frac{r}{c}\right)$. Donde $\frac{r}{c}$ se llama tiempo de retardo. El tiempo de retardo representa el intervalo de tiempo durante el cual el campo electromagnético, que se propaga con una velocidad c , recorre el camino r .

Pero:

$$\int \vec{j} dV' = \int \vec{r}' \dot{\rho}(\vec{r}', \tau_0) dV' = \frac{d}{d\tau} \int \vec{r}' \rho(\vec{r}', \tau_0) dV' = \dot{\vec{d}}(\tau_0) \quad (3.8)$$

En donde $\tau_0 = t - \left(\frac{r}{c}\right)$ es el tiempo de retardo del sistema, representa el tiempo necesario para que el campo electromagnético se propague desde el origen de coordenadas hasta el punto de observación.

Reemplazando (3.8) en (3.7) se tiene

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{\dot{d}}(\tau_0)}{cr} \quad (3.9)$$

Reemplazando (3.9) en (3.6), haciendo $\frac{1}{r}$ constante y empleando la ecuación (A.4) del apéndice

$$\begin{aligned} \vec{H} = \nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{c} \nabla \times \frac{\vec{\dot{d}}(\tau_0)}{r} = \frac{1}{cr} \nabla \tau_0 \times \frac{d\vec{\dot{d}}(\tau_0)}{d\tau_0} = \frac{1}{c} \vec{A} \times \vec{n} \\ \vec{H} &= \frac{1}{c^2 r} \ddot{\vec{d}} \times \vec{n} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Remplazando (3.10) en (3.5)

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \frac{c}{4\pi} \left(\frac{1}{c^2 r} \ddot{\vec{d}} \times \vec{n} \right)^2 \vec{n} \\ \vec{\sigma} &= \frac{1}{4\pi c^3 r^2} \left[\vec{n} \times \ddot{\vec{d}} \right]^2 \vec{n} \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.2. FLUJO DE ENERGÍA DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO EN COORDENADAS ESFÉRICAS

Introduzcamos un sistema de coordenadas esférica r, θ, ψ (Figura 3) cuyo eje polar tiene igual dirección y sentido que el vector $\ddot{\vec{d}}$.

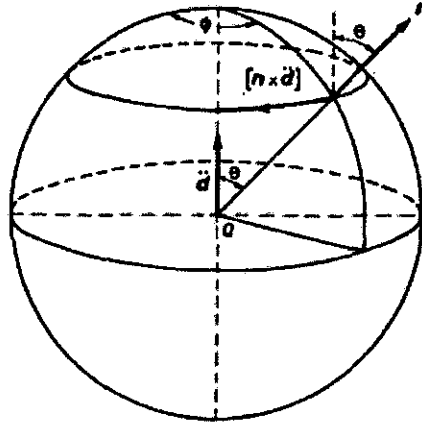


Figura 3. Representación del frente de ondas que se aleja del emisor, en coordenadas esféricas.

La dirección (orientada) del vector \vec{H} se determina por el vector $[\vec{n} \times \ddot{\vec{d}}]$ que es tangente al paralelo sobre la superficie de la esfera y orientado en el sentido en que decrece el acimut ψ , de modo que

$$[\vec{n} \times \ddot{\vec{d}}]_r = 0, \quad [\vec{n} \times \ddot{\vec{d}}]_\theta = 0, \quad [\vec{n} \times \ddot{\vec{d}}]_\psi = -\ddot{d} \sin \theta \quad (3.12)$$

En consecuencia, en este sistema de coordenadas esféricas el vector \vec{H} tiene las componentes siguientes:

$$H_r = 0, \quad H_\theta = 0, \quad H_\psi = \frac{\ddot{d}}{c^2 r} \sin \theta \quad (3.13)$$

El vector \vec{E} es perpendicular a los vectores \vec{H} y \vec{n} , dirigido a lo largo de la tangente al meridiano y orientado en el sentido en que decrece el ángulo polar θ . Sus proyecciones son iguales a

$$E_r = 0, \quad E_\theta = \frac{\ddot{d}}{c^2 r} \sin\theta, \quad E_\phi = 0 \quad (3.14)$$

Las ecuaciones (3.13) y (3.14) muestran que las intensidades del campo alcanzan su valor máximo para $\theta = \pi/2$ (en el plano ecuatorial) y disminuyen a medida que se acercan al eje polar hasta anularse.

Calculando el vector de Poynting del sistema emisor (ecuación (3.11)), según el vector posición (ecuación (3.13)) y su módulo es igual a:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \frac{1}{4\pi c^3} \frac{\ddot{d}^2}{r^2} \sin^2\theta \vec{n} \\ \sigma &= \frac{1}{4\pi c^3} \frac{\ddot{d}^2}{r^2} \sin^2\theta \end{aligned} \quad (3.15)$$

El hecho del que vector de Poynting sea diferente de cero y este siempre dirigido alejándose del sistema, tiene un significado evidente: se produce un flujo de energía electromagnética desde el sistema emisor al espacio que lo rodea. La ecuación (3.15) determina la densidad de flujo de energía radiada en función de la orientación en el espacio (ángulo θ) y de la distancia del sistema emisor.

Reemplazando (3.2) en (3.15) se tiene

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \frac{1}{4\pi c^3} \frac{(ew)^2}{r^2} \sin^2\theta \vec{n} \\ \vec{\sigma} &= \frac{1}{4\pi c^3} \frac{e^2 w^2}{r^2} \sin^2\theta \vec{n} \end{aligned} \quad (3.16)$$

El flujo de energía en la dirección del vector aceleración ($\theta = 0$) es nulo, mientras que toma su valor máximo en la orientación perpendicular a dicho vector ($\theta = \pi/2$).

3.3. INTENSIDAD TOTAL DE RADIACIÓN

El flujo de energía a través de un elemento de área (vectorial) $d\vec{\Sigma}$ que subtiende un ángulo solido $d\Omega$ se llama intensidad de radiación dI en un ángulo solido $d\Omega$.

$$dI = \sigma \cdot d\Sigma = \sigma d\Sigma = \sigma r^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2 d\Omega$$

$$dI = \frac{\ddot{d}^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 r^2} r^2 d\Omega = \frac{\ddot{d}^2 \sin^3 \theta}{4\pi c^3} d\theta d\psi \quad (3.17)$$

El flujo total de energía emitida por el sistema, que se suele llamar intensidad total de radiación, es igual a

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = I = \int \sigma \cdot d\Sigma = \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{2}{3} \frac{\ddot{d}^2}{c^3}$$

$$I = \frac{2}{3} \frac{\ddot{d}^2}{c^3} \quad (3.18)$$

Aquí $(d\varepsilon/dt)$ es la disminución de la energía del sistema emisor en 1 segundo.

La energía total emitida por unidad de tiempo dentro del ángulo solido $d\Omega$ (intensidad total de radiación en el ángulo $d\Omega$) es igual a (reemplazando (3.2) en (3.17)).

$$dI = \frac{e^2 w^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 r^2} r^2 d\Omega = \frac{e^2 w^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3} d\Omega \quad (3.19)$$

Y resulta así proporcional al cuadrado de la aceleración. La intensidad total emitida en todas direcciones por una carga aislada vale (reemplazando la ecuación (3.2) en la ecuación (3.18))

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2 w^2}{c^3} \quad (3.20)$$

Viene determinada por tanto, por el cuadrado del módulo de la aceleración y por el cuadrado de la carga. Vemos así que una carga cualquiera que se mueve con movimiento acelerado emite energía en la forma de ondas electromagnéticas.

3.4. PÉRDIDA TOTAL DEL IMPULSO POR LA PARTÍCULA EMISORA

Calculemos también la pérdida de impulso por la partícula emisora. En virtud de la ecuación (2.16). Vemos que la pérdida total de impulso de la carga como consecuencia de la emisión es:

$$-\frac{d\vec{P}}{dt} = \int \vec{g} d\Omega = \frac{1}{c^2} \int \vec{\sigma} d\Omega = 0 \quad (3.21)$$

Este resultado significa que la radiación de la carga es la misma para los ángulos $\theta, \pi - \theta$. Los impulsos de la radiación en sentidos opuestos se compensan entre sí. Hay que subrayar que las ecuaciones (3.20) y (3.21) se refieren a una carga que se hallaba en reposo en el instante en que se produjo la emisión. Únicamente para una carga tal se cumple la ecuación (3.1).

Consideremos un ejemplo de cálculo de la radiación emitida por una carga en movimiento: Supongamos por ejemplo que la carga se mueve en un campo magnético homogéneo. Para simplificar, admitiremos que la velocidad inicial de la carga \vec{v}_0 es perpendicular al vector \vec{H} . La carga que se mueve en el campo magnético tiene una aceleración

$$\vec{w} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{e}{mc} \vec{v} \times \vec{H} \quad (3.22)$$

Y de acuerdo con esto, emite continuamente ondas electromagnéticas. La intensidad total de radiación es igual a (reemplazando en ecuación (3.20))

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^5} [\vec{V} \times \vec{H}]^2 \quad (3.23)$$

Si se considera pequeña la pérdida de energía, puede suponerse que la velocidad de la carga es aproximadamente constante: $\vec{v} \sim \vec{v}_0$ entonces se tiene que $\vec{V} \times \vec{H} \sim \vec{v}_0 \times \vec{H} = v_0 H$. Por tanto

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^4 v^2 H^2}{m^2 c^5} = \frac{4}{3} \frac{e^4 H^2}{m^3 c^5} \left(\frac{mv^2}{2} \right) \quad (3.24)$$

La energía emitida es inversamente proporcional a c^5 y muy pequeña. Sin embargo, crece con la energía de la partícula y el efecto de la radiación cobra importancia para valores muy grandes de tales energías, como por ejemplo, para las partículas de los rayos cósmicos en el campo magnético de la tierra o para electrones rápidos que se mueven en los campos magnéticos de los betatrones actuales. Pero no hay que perder de vista que la formula (3.24) es aplicable solamente para velocidades $v \ll c$. El caso en que $v \sim c$ (ultrarrelativista) se analizara a continuación.

CAPITULO IV

4. RADIACIÓN EMITIDA POR UNA CARGA EN MOVIMIENTO

4.1. PERDIDA DE ENERGÍA DE PARTÍCULAS ULTRARRELATIVISTAS QUE SE MUEVEN EN CAMPOS ELÉCTRICOS

La fórmula (3.20) del capítulo III, para la radiación emitida por una carga en movimiento es solo aplicable en la caso de velocidades que son pequeñas comparadas con la de la luz. A fin de obtenerla expresión análoga válida para velocidades próximas a la de la luz, introduciremos en el razonamiento un conjunto de sistemas acompañantes de coordenadas en lo que, en cada instante, la partícula se encuentra en reposo. En todos ellos es correcta la fórmula (3.20) del capítulo III para la radiación emitida. Esta radiación tiene el carácter de ondas esféricas, de modo que el impulso total de las ondas electromagnéticas radiales es igual a cero. La energía emitida por una carga en la unidad de tiempo es, según (1.53) del capítulo I, es un invariante:

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{d\varepsilon'}{dt'} = \text{invar} \quad (4.1)$$

Para la pérdida de energía debida a la radiación por unidad de tiempo se puede escribir, de acuerdo con (3.20) del capítulo III.

$$\frac{d\varepsilon'}{dt'} = -\frac{2e^2(w')^2}{3c^3} = -\frac{2e^2(w'_a)^2}{3c^3} \quad (4.2)$$

Puesto que el sistema de coordenadas acompañante es $w'_r = 0$. El impulso que se pierde por radiación en la unidad de tiempo es igual a cero según (3.21) del capítulo III:

$$\frac{d\vec{P}'}{dt'} = 0 \quad (4.3)$$

Para hallar la radiación emitida en un sistema arbitrario (sin apostrofo) basta transformar el cuadrado de la aceleración $(w'_a)^2$ según la fórmula (1.31) del capítulo I pasando a la aceleración en dicho sistema.

Tenemos entonces:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon'}{dt'} = -\frac{2e^2 \dot{v}^2 - \left[\frac{\vec{V}}{c} \times \dot{\vec{V}} \right]^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} = -\frac{2e^2 \dot{v}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2} (\vec{V} \cdot \dot{\vec{V}})^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} \quad (4.4)$$

En este caso obtenemos, para la variación del impulso por unidad de tiempo, mediante (1.41) y (4.4),

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{V}}{c^2} \frac{d\varepsilon'}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{2e^2 \dot{v}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2} (\vec{V} \cdot \dot{\vec{V}})^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} \frac{\vec{V}}{c^2} \quad (4.5)$$

Evidentemente, si $v/c \ll 1$ las formulas (4.4) y (4.5) se reducen a las (4.2) y (4.3).

Las formulas (4.4) y (4.5) permiten hallar en un sistema de coordenadas arbitrario. Por ejemplo, el del laboratorio, la energía y el impulso del campo de radiación creado por una carga en movimiento.

Frecuentemente, el movimiento acelerado de las partículas que se mueven a gran velocidad está ligada con la acción de sobre ellas del campo electromagnético. Para transformar las formulas (4.4) y (4.5) en las correspondientes a este caso particular, nos valdremos de la expresión del apéndice (B.10) para la aceleración de una partícula en un campo electromagnético; substituyendo el valor de la fuerza de Lorentz, se encuentra

$$\vec{W} = \dot{\vec{V}} = \frac{\dot{e}}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{H} - \frac{\vec{V}}{c^2} (\vec{V} \cdot \vec{E}) \right\} \quad (4.6)$$

Utilizando esta expresión para la aceleración, tenemos

$$\begin{aligned}
 & \dot{v}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2} (\vec{V} \cdot \dot{\vec{V}})^2 \\
 &= \frac{e^2}{m^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left\{ \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{H}\right)^2 + \frac{v^2}{c^4} (\vec{V} \cdot \vec{E})^2 - \frac{2(\vec{V} \cdot \vec{E})^2}{c^2} \right\} \\
 &+ \frac{e^2}{m^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3 \frac{(\vec{V} \cdot \vec{E})^2}{c^2} \\
 &= \frac{e^2}{m^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 \left\{ \left(\vec{E} + \frac{\vec{V} \times \vec{H}}{c}\right)^2 - \frac{(\vec{V} \cdot \vec{E})^2}{c^2} \right\} \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

La Radiación de energía en la unidad de tiempo por una carga que se mueve en un campo electromagnético, se obtiene reemplazando la ecuación (4.7) en la ecuación (4.4), se tiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2e^4}{3m^2c^3} \frac{\left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{H}\right)^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{V} \cdot \vec{E})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
 &= -\frac{2e^4}{3m^4c^7} \left[\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]^2 \left\{ \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{H}\right)^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{V} \cdot \vec{E})^2 \right\} \\
 \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2e^4}{3m^4c^7} \varepsilon^2 \left\{ \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{V} \times \vec{H}\right)^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{V} \cdot \vec{E})^2 \right\} \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Consideremos algunos casos particulares de la formula (4.8) para condiciones ultrarrelativistas, en las que $v \approx c$.

Para nuestro caso, solo con el campo eléctrico (es decir, que $\vec{H} = 0$). Entonces se tiene de (4.8)

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2e^4}{3m^4c^7} \left\{ (\vec{E})^2 - \frac{(\vec{V} \cdot \vec{E})^2}{c^2} \right\} \quad (4.9)$$

$\vec{V} \perp \vec{E}$, la pérdida de la energía es:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2e^4}{3m^4c^7} (\vec{E})^2 \varepsilon^2 \quad (4.10)$$

Cuando $\vec{V} \parallel \vec{E}$, dicha pérdida vale

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2e^4\varepsilon^2}{3m^4c^7} (\vec{E})^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2e^4}{3m^2c^3} (\vec{E})^2 \quad (4.11)$$

Y es independiente de la energía.

Las formulas (4.9) – (4.11) se emplean en fisica nuclear para determinar la pérdida de energía de partículas ultrarrelativistas que se mueven en campos eléctricos.

4.2. RADIACIÓN DE FRENADO DE PARTÍCULAS ULTRARRELATIVISTAS EN EL CAMPO ELÉCTRICO DE UN NÚCLEO

Una aplicación importante de las formulas obtenidas es el cálculo de la radiación de frenado de partículas ultrarrelativistas en el campo eléctrico de un núcleo.

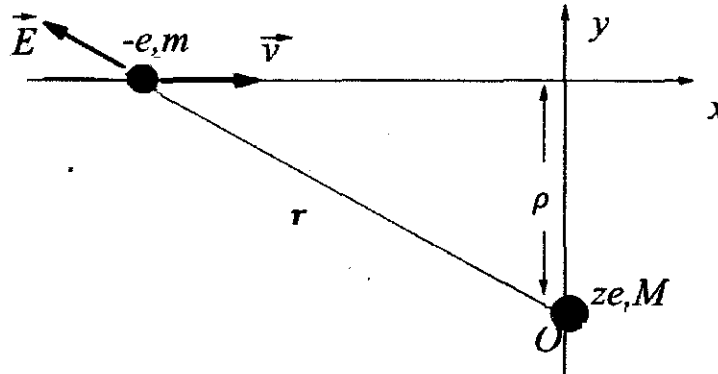


Figura 4. Esquema de un electrón ultrarrelativista frente al campo eléctrico generado por núcleo de un átomo. En la figura m y M son masas del electrón y núcleo respectivamente, y e y ze son cargas del electrón y núcleo respectivamente.

Un electrón ultrarrelativista que pasa por delante de un núcleo experimenta una desviación muy pequeña. Su velocidad puede considerarse constante, y la aceleración, perpendicular a la velocidad e igual a $w_{\perp} = eE_{\perp}/m$, donde

$$E_{\perp} = Ze\rho/r^3$$

Es la componente del campo del núcleo normal a la velocidad (elegiremos el eje x paralelo a esta última). Para la aceleración transversal cabe utilizar la expresión no relativista, puesto que la correspondiente componente de la velocidad es muy pequeña. El parámetro de impacto es ρ , y r la distancia entre el núcleo y el electrón. En el movimiento con velocidad constante se puede considerar que

$$r = (\rho^2 + v^2 t^2)^{1/2}$$

La fórmula (4.10) da para la pérdida de energía por unidad de tiempo

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2e^2}{3m^2c^3} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (\vec{E}_\perp)^2 = -\frac{2Z^2e^4}{3m^2c^3} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + v^2t^2)^3}$$

Integrando respecto del tiempo de vuelo, obtenemos la pérdida total de energía de la partícula ultrarrelativista por radiación de frenado

$$\Delta\varepsilon = -\frac{2Z^2e^4}{3m^2c^3} \frac{\rho^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(\rho^2 + v^2t^2)^3}$$

Evidentemente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(1 + \frac{v^2t^2}{\rho^2}\right)^3} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{\left(1 + \frac{v^2t^2}{\rho^2}\right)^3} = 2 \frac{\rho}{v} \int_0^{\pi/2} \cos^4 z dz = \frac{3\pi\rho}{8v}$$

Y por lo tanto,

$$\Delta\varepsilon = -\frac{\pi}{4} \frac{Z^2e^4}{m^2c^3v} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \frac{1}{\rho^3} \quad (4.13)$$

El valor de la pérdida de energía crece rápidamente al aumentar el número atómico Z de la materia en que se mueve la partícula. La fórmula (4.13) determina la pérdida de energía de una partícula que pasa por delante de un núcleo a una distancia ρ del mismo y prueba que dicha pérdida crece rápidamente al disminuir ρ .

En la práctica una partícula puede pasar a cualquier distancia de un núcleo. Multiplicando (4.13) por $2\pi\rho d\rho n$, donde n es la densidad del haz, e integrando para todos los valores de ρ , encontramos la radiación efectiva de un haz de partículas

$$\varepsilon_{ef} = -\frac{\pi^2}{2} \frac{Z^2 e^4}{m^2 c^3 v} \frac{n}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \int_{\rho_{min}}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2} = -\frac{\pi^2}{2} \frac{Z^2 e^4}{m^2 c^3 v} \frac{n}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \frac{1}{\rho_{min}} \quad (4.14)$$

En la formula (4.14) se ha introducido la distancia mínima a la que puede aproximarse el electrón al núcleo, dado que la integral diverge en el límite inferior. La introducción de esta incógnita significa que la teoría clásica de la radiación es inaplicable al cálculo de la radiación de frenado.

4.3. CORRECCIONES MECANOCUÁNTICAS PARA LA RADIACIÓN DE FRENADO DE PARTÍCULAS ULTRARRELATIVISTAS EN EL CAMPO ELÉCTRICO DE UN NÚCLEO

Los resultados obtenidos mediante la anterior expresión son bastante aceptables para proyectiles como partículas alfa o núcleos pesados pero lentos. Si el bombardeo se realiza con proyectiles pequeños como los electrones los resultados son lamentables ya que se requiere un análisis mecanocuántico del problema. Esto se debe básicamente a que:

- La transferencia de energía ha de ser discreta.
- Interviene el Principio de Incertidumbre, debido a la naturaleza ondulatoria de las partículas.

Las consideraciones cuánticas nos demuestran que el resultado clásico de la transferencia de una pequeña cantidad de energía de cada colisión es incorrecto. Pero si consideramos un gran número de colisiones, vemos que por término medio si se transfiere una pequeña cantidad de energía. Sin embargo, esta no se transfiere en cada colisión. En la mayor parte de las colisiones no hay transferencia energética. Pero en algunas, tiene lugar una excitación apreciable, que nos lleva a un pequeño valor medio al considerar muchas

colisiones. En este sentido estadístico pueden reconciliarse el mecanismo cuántico, que considera transferencias de energía discretas, y el mecanismo clásico, con un continuo de posibles valores de la transferencia de energía.

La otra modificación cuántica importante procede de la naturaleza ondulatoria de las partículas. El principio de incertidumbre impone ciertos límites al margen de la validez de las consideraciones sobre orbitas clásicas. Si intentamos construir trenes de ondas que den significado aproximado a una trayectoria clásica, sabemos que el camino solo puede definirse con una incertidumbre

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta P}$$

Cuando los parámetros de impacto ρ sean menores que esta incertidumbre, fallan los conceptos clásicos. Como la naturaleza ondulatoria de las partículas implica en cierto sentido que se difuminen en distancias del orden de Δx , podemos adelantar que la pérdida de energía correcta mecano-cuántica corresponderá a transferencias de energía mucho mas pequeñas que la dada por la forma clásica. En la colisión de dos partículas, cada una de ellas tiene naturaleza ondulatoria. Para una cierta velocidad relativa, la limitación debida al principio de incertidumbre corresponde a la más ligera de los dos.

Es más, en la colisión de una partícula ligera con otra pesada, el centro de masas (CM) esta, aproximadamente en el entorno de la partícula pesada. En este sistema CM el blanco estará en reposo, pero no el blanco. El momento electrónico será:

$$\Delta p = \langle p' \rangle = \frac{m \langle v \rangle}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.15)$$

Siendo m la masa electrónica y $\langle v \rangle$ el valor esperado de la velocidad del proyectil que para el caso $E \gg mc^2$, caso extremo relativista $v \sim c$. A través del Principio de Incertidumbre obtenemos que el parámetro de impacto mínimo cuántico es

$$\rho_{min} = \frac{\hbar}{mc} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

De modo que

$$\varepsilon_{ef} = -\frac{\pi^2}{2} \frac{Z^2 e^4}{mc^2 v h} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.16)$$

La fórmula (4.16) permite hallar la perdida por radiación del frenado cuando partículas muy rápidas atraviesan la materia.

La comparación de (4.16) con la fórmula que da la pérdida de energía por ionización, muestra que la radiación de frenado es el factor fundamental que determina la disminución de velocidad de los electrones rápidos en la materia. Las pérdidas debido a este tipo de radiación son importantes para electrones con energías del orden de $200mc^2$ (100 MeV) en el aire y de $20mc^2$ (10 MeV) en el plomo. En el caso de partículas pesadas, por ejemplo protones, casi todas las perdidas están ligadas con la ionización hasta energías muy grades.

4.3.1. APLICACIONES DE LA RADIACIÓN DE FRENADO DE PARTÍCULAS ULTRARRELATIVISTAS

a. Pérdida de energía de los electrones rápidos por radiación

Como se dijo antes, la causa principal de pérdida de energía por un electrón muy rápido ($\varepsilon \gg mc^2$), caso extremo relativista, que atraviesa la materia es la radiación electromagnética que emite debido a las aceleraciones a las que se ve sujeto. A baja energías ($\varepsilon \ll mc^2$) que corresponde al caso no relativista, está perdida por radiación carece de importancia comparada con la perdida por ionización, pero a altas energías llega a ser preponderante. La pérdida de energía por radiación es proporcional al valor Z^2 del material y crece linealmente con la energía del electrón. La pérdida de energía debida a ionización y excitación es proporcional a Z y aumenta tan solo logarítmicamente con la energía. Así pues, la pérdida por radiación de frenado predomina a altas energías. Entre las aplicaciones de la radiación de frenado se tiene.

La dispersión de electrones por núcleos es el método más usual de determinar distribuciones de carga de núcleos. Este procedimiento compórtate la ventaja de la excitación coulombiana de que el potencial de interacción es conocido. Mediante la dispersión elástica de electrones solo se puede determinar la distribución esférica de carga del núcleo. Además de explicar fenómenos en diferentes áreas de la física tales como:

b. Rayos X

Un electrón, con carga negativa, puede pasar próximo a un núcleo atómico, con carga positiva, puede quedar frenado en su trayectoria por atracción de las cargas de distinto signo que poseen, disminuyendo su energía cinética. La energía cinética perdida por el electrón se puede emitir en forma de un fotón de rayos X. El electrón puede perder más o menos energía, dependiendo de su energía cinética inicial, de la proximidad de su trayectoria a los núcleos de los átomos del ánodo y del número de veces que sufra interacciones con pérdida de energía. Las posibilidades de ese enfrenamiento son muy variables, pueden encontrarse entre una fuerte atracción que resulte en un frenado completo, con lo que el 100% de su energía cinética daría lugar a radiación X; o bien, en algunos casos, el electrón puede seguir su camino sin sufrir ningún tipo de modificación en su trayectoria, lo cual no provocaría emisión alguna de radiación X. Por consiguiente el fotón emitido puede tener una energía muy variable. Un haz continuo de electrones que choquen con el ánodo dará lugar a un haz de fotones heterogéneos, de distintas energías por lo que se dice que la energía radiada por el frenado es la que explica el espectro continuo emitido por los tubos de rayos X

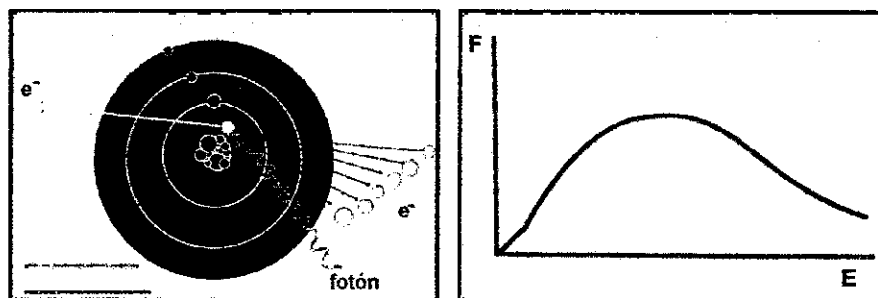


Figura 5. A la izquierda, el frenamiento de un electrón en la colisión con el núcleo y a la derecha el espectro de la radiación producto del enfrenamiento.

c. Altas Energías

A energías altas, los fenómenos que acompañan a la radiación de frenado son bastante complicados y alcanzan proporciones colosales como por ejemplo, en la formación de chaparrones que contienen millones de partículas, en el caso de rayos cósmicos de alta energía. Un fotón de alta energía en presencia de un campo magnético, electrostático o de radiación puede producir un par $\gamma \rightarrow e^+e^-$. Estos a su vez pueden interactuar con el mismo campo, $e^\pm \rightarrow \gamma e^\pm$ y producir más fotones de alta energía dando lugar a lo que se conoce como una cascada electromagnética. Una vez producidos los electrones producen fotones de alta energía por radiación de frenado al atravesar una densidad de columna atmosférica similar a $\sim 37 gcm^{-2}$. La cascada electromagnética se detiene cuando los electrones empiezan a interactuar con los núcleos por ionización en vez de radiación de frenado.

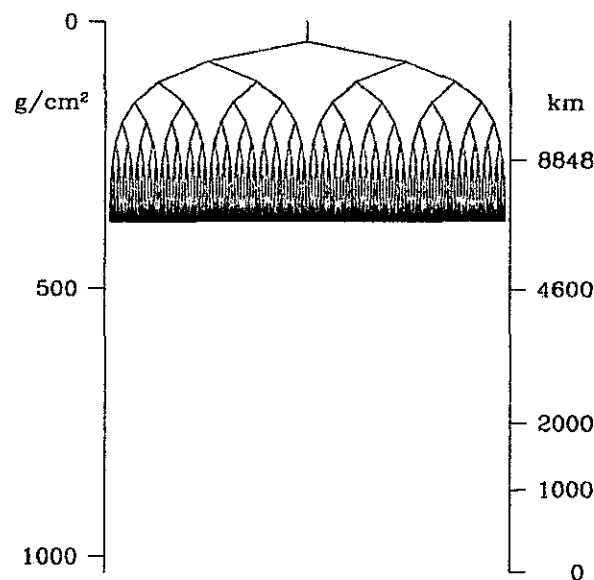


Figura 6. Ilustración de una cascada electromagnética, con los fotones en azul y los e^\pm en color rojo.

d. Microcuásares

Algunas de las fuentes de rayos gamma galácticas son sistemas binarios en los que una de las componentes es una estrella de gran masa y la otra es una estrella similar o un objeto compacto (ya sea una estrella de neutrones o un agujero negro de masa estelar). Este tipo de binarias presenta emisión no térmica en las bandas de radio y de rayos-X, generada por partículas ultrarrelativistas que son aceleradas, generalmente, en ondas de choque fuertes relacionadas con flujos de plasma. Es probable que la radiación proveniente del sistema binario sufra absorción y reprocesamiento en el medio local, por lo que su estudio puede proveer información del emisor y de las propiedades del medio. Además, la investigación de estos objetos puede proporcionar conocimientos de los procesos físicos no térmicos que ocurren en escenarios astrofísicos extremos, con flujos de materia altamente supersónicos, plasma turbulento, campos magnéticos fuertes, campos de radiación intensos y medios densos.

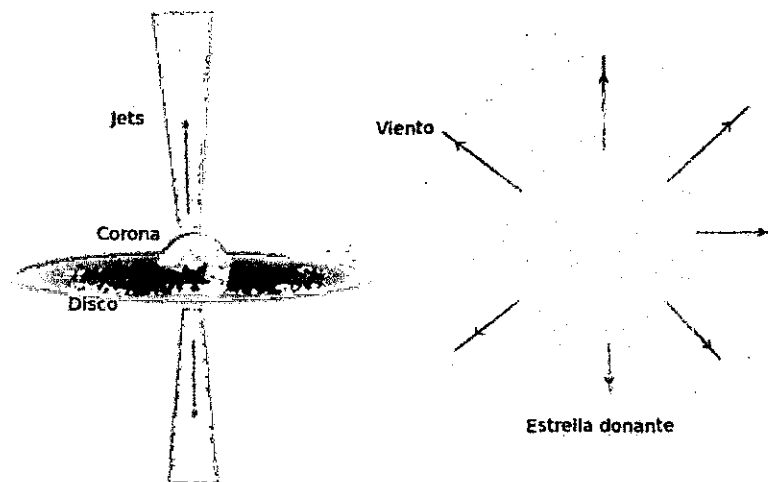


Figura 7. Un microcuásar con una estrella donante de gran masa. Se pueden distinguir los siguientes elementos: una estrella masiva, un objeto compacto en torno al cual se genera un disco de acreción debido al material que recibe de la estrella compañera, el campo de radiación de la estrella y sus vientos estelares, una corona de plasma muy caliente en torno al objeto compacto y jets perpendiculares al disco de acreción.

Un microcuásar es una binaria emisora de rayos-X (*X-Ray Binary* o XRB por sus siglas en inglés) con *jets* (chorros relativistas) extendidos. El sistema binario está formado por una estrella de secuencia principal (en el caso que ésta sea de tipo espectral O-B, la XRB se dice que es de gran masa, y en caso contrario se dice que es una XRB de baja masa), y un objeto compacto (estrella de neutrones o un agujero negro). El objeto compacto acreta material de la estrella compañera, parte del cual es expulsado a grandes velocidades formando *jets* bipolares que arrastran campos magnéticos intensos. Además, los flujos de materia producidos por los vientos estelares de la estrella compañera, junto con su campo de radiación, llevan a la producción de partículas y fotones de muy alta energía cuando interactúan con el *jet* (Bosch-Ramon & Khangulyan 2009). De esta manera, los microcuásares se comportan como una versión a escala más pequeña de los *cuásares* (del inglés, ‘quasi-stellar-radio-source’), núcleos de galaxias activas que albergan un agujero negro supermasivo y constituyen unas de las fuentes astrofísicas de mayor luminosidad en el universo.

e. Sincrotrón

La Radiación Sincrotrón (RS) es radiación generada por partículas cargadas, aceleradas hasta velocidades ultra-relativistas, forzadas a seguir una trayectoria curva y por tanto a emitir. Las partículas cargadas, habitualmente electrones, se mantienen durante horas formando paquetes que viajan a una velocidad extremadamente cercana a la de la luz (con energías de varios Giga-electronvoltios) en un “anillo de almacenamiento”, que no es sino un acelerador de partículas dedicado a la producción de radiación sincrotrón.

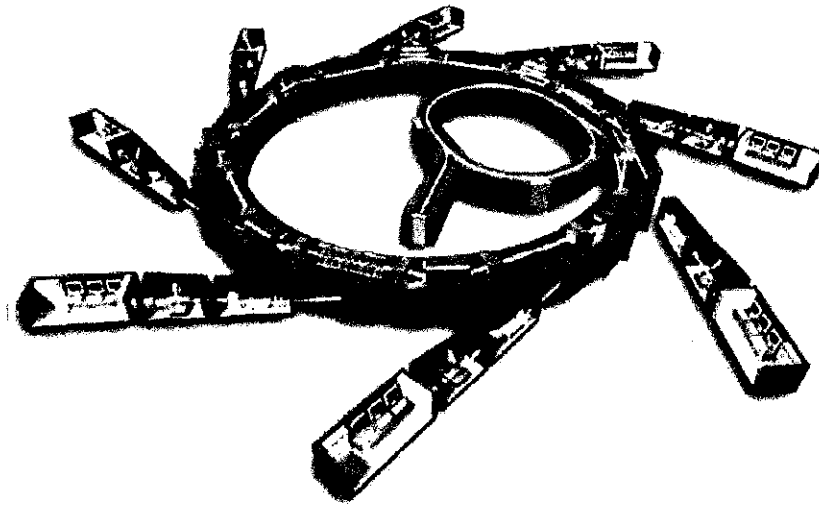


Figura 8. Esquema de un Sincrotrón de segunda generación. Los electrones se aceleran en dos etapas hasta llegar a su energía definitiva.

Si la velocidad, o energía, de los electrones es pequeña, del orden de algunos cientos de voltios se le llama Ciclotrón y la radiación emitida por una carga acelerada tiene su máxima intensidad en el plano perpendicular al vector aceleración, siendo nula en la dirección de dicho vector. Por otro lado la distribución respecto del ángulo acimut es homogénea, formando una especie de rosquilla cuyo agujero es coaxial con el vector aceleración (ver figura 9 a).

En un Sincrotrón los electrones se mueven a una velocidad muy próxima a la de la luz, con energías del orden del GeV (giga electrón-voltio, $1GeV = 10^9 eV$). Para partículas a estas velocidades es necesario considerar la teoría de la relatividad y aplicar las correspondientes transformaciones de Lorentz. La deformación espacio-temporal resultante de esta transformación hace que, mientras que en el sistema de referencia de la partícula la radiación es emitida homogéneamente en el plano perpendicular a la aceleración, como en el caso clásico, en el sistema de referencia en reposo (el que nos interesa, es decir, el del laboratorio) la radiación es emitida a lo largo de un cono dirigido en la misma dirección que la velocidad de la partícula en ese instante (ver figura 9 b). La apertura del cono disminuye a medida que aumenta la velocidad de la partícula según la expresión

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

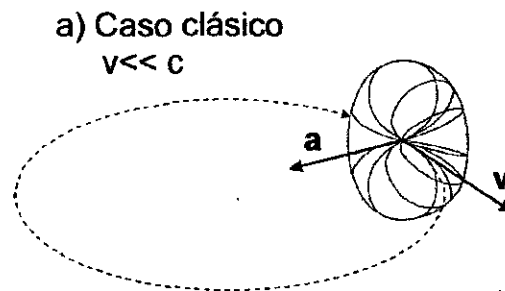


Figura 9 a). La radiación emitida por una carga acelerada tiene la distribución respecto del ángulo acimut homogénea, formando una especie de rosquilla.

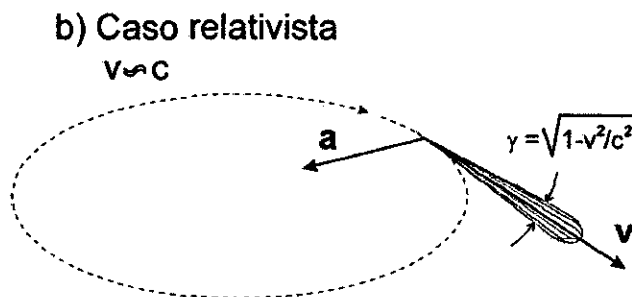


Figura 9 b). La radiación emitida por una carga acelerada tiene la distribución respecto del ángulo acimut homogénea, formando una especie de cono cuya apertura disminuye con el aumento de la velocidad del electrón.

Clasificación de los dominios de energía incidente: Es usual clasificar las reacciones nucleares con respecto a la energía de colisión. Los términos acuñados en la bibliografía son los siguientes:

1. Bajas energías: Hasta 10A MeV . Usualmente reacciones a energías cercanas a la barrera de Coulomb, con el propósito de estudiar los mecanismos de reacción y la estructura de los núcleos y de obtener información espectroscópica.

2. Energías intermedias: Son energías por encima de la energía de Fermi, típicamente desde 20 MeV hasta 200 MeV . Se estudian esencialmente en ciclotrones y aceleradores lineales.

3. Energías relativistas: Son energía que van desde unos 500 MeV hasta unos 10 GeV . Se estudian con sincrotrones.

4. Energías ultrarrelativistas: Es cuando la energía cinética es muy superior a la masa del nucleón. Se estudiaron en un principio en el sincrotrón SPS del CERN entre 60 GeV y 200 GeV de energía incidente. Actualmente se estudian en anillos de colisión como el RHIC a 200 GeV en el sistema CM y próximamente en el LHC a 5.5 TeV en CM para iones pesados y 14 TeV para $p + p$.

V. RESULTADOS

Se presentan a continuación los resultados obtenidos en el desarrollo del presente trabajo de tesis:

1. La ecuación (3.20), es la intensidad total de radiación (flujo de energía por unidad de tiempo) emitida en todas direcciones por una carga en movimiento clásico ($v \ll c$) acelerado. A esta ecuación también se le conoce como fórmula de Larmor para una carga acelerada no relativista.
2. La ecuación (4.11), es la intensidad total de radiación (flujo de energía por unidad de tiempo) emitida en todas direcciones por una carga que se mueve en un campo eléctrico a velocidades ultrarrelativistas ($v \approx c$) acelerado. Esta ecuación se emplea en física nuclear para determinar la pérdida de energía de partículas ultrarrelativistas que se mueven en un campo eléctrico externo.
3. La ecuación (4.13), determina la pérdida de energía de una partícula que pasa por delante de un núcleo a una distancia ρ (parámetro de impacto) del mismo. El valor de la pérdida de energía crece rápidamente al aumentar el número atómico Z de la materia en que se mueve la partícula y además prueba que dicha pérdida crece también rápidamente al disminuir ρ .
4. La ecuación (4.14), es una mejora de la ecuación (4.13), ya que se ha introducido la distancia mínima (ρ_{min}) a la que puede aproximarse el electrón al núcleo, dado que la integral diverge en el límite inferior. La introducción de esta incógnita significa que la teoría clásica de la radiación es inaplicable al cálculo de la radiación de frenado.

5. Debido a la inaplicabilidad de la teoría clásica al cálculo de la radiación de frenado, ecuación (4.14), se realizan dos correcciones mecanocuánticas, siendo estas, la transferencia de energía ha de ser discreta y la intervención del Principio de Incertidumbre, debido a la naturaleza ondulatoria de las partículas.
6. La ecuación (4.16), es el resultado de las correcciones mecanocuánticas realizadas a la ecuación (4.14). La ecuación (4.16) permite hallar la pérdida por radiación del frenado cuando partículas muy rápidas atraviesan la materia.

VI. CONCLUSIONES

- Al estudiar la radiación originada por la deflexión de un electrón debido a su interacción con el campo eléctrico, se constató que juega un papel importante en la física nuclear y que para el caso particular de la interacción del electrón con el campo eléctrico constante de un núcleo, se pudo determinar que la pérdida de radiación por frenamiento emitida durante la interacción es proporcional al valor Z^2 del material, a la distancia de la que pasa el electrón con respecto al núcleo y crece linealmente con la energía del electrón, por lo que a velocidades extremadamente cercanas a la de la luz, esta radiación de frenado es la más importante con respecto a las diferentes interacciones que se suscitan durante el frenamiento.
- La expresión para la radiación de frenado en el campo eléctrico de un núcleo se realizó un análisis mecanocuántico debido a la naturaleza discreta de la energía radiada durante la interacción y por el comportamiento ondulatorio de la partícula incidente, implica en cierto sentido que se difuminen en distancias del orden de Δx , por lo que se empleó el principio de incertidumbre, así se tiene una expresión que nos calcula la variación de energía que sufre la partícula incidente para el caso particular en que su velocidad es aproximadamente a la velocidad de la luz ($v \approx c$).
- El entendimiento de este fenómeno y su total comprensión, nos permitirá hacer modelamientos matemáticos para diferentes aplicaciones en beneficio de la ciencia tales como los ciclotrones o betatrones y de cómo la radiación de frenado de estos interacciona con la materia sobre la cual se hace incidir. El análisis de la respuesta de esta interacción proporciona valiosa información sobre la materia que se estudia, tales absorción, difracción y reflexión.

- Con el avance de la tecnología se han podido identificar muchos procesos naturales, cuyo principio es la interacción de partículas ultrarrelativistas con campos eléctricos o magnéticos de partículas mucho más grande que las incidentes. Tales fenómenos tales como la cascada electromagnética debido a la interacción de la radiación cósmica con la atmosfera. Los cuásar que emiten radiación entre la cual hay Rayos-X, generada por partículas ultra-relativistas que son aceleradas, generalmente, en ondas de choque fuertes relacionadas con flujos de plasma.
- Durante el proceso de colisión de partículas ultrarrelativistas con la materia se dan diferentes fenómenos, y es importante la comprensión de la radiación de frenado, ya que también se dan fenómenos, tales como la radiación por polarización, la radiación de Cherenkov, entre otras. Además de existir la radiación de frenado térmico (que depende de la temperatura de equilibrio de los electrones). Y así poder distinguirla de estos otros fenómenos para estudiar mejor sus causas y efectos.

VII. RECOMENDACIONES

- Este trabajo de tesis está enfocado en la obtención de la ecuación de la radiación de frenado de partículas ultrarrelativistas que pasan delante del campo eléctrico constante del núcleo, siendo la velocidad fija para la partícula incidente $v \sim c$, pero debido a que toda carga en movimiento genera un campo a su alrededor, este campo interactúa también con el campo eléctrico del núcleo, dejándolo polarizado, por lo que éste (núcleo) emite la energía adquirida en forma de ondas electromagnéticas transversales, esta fuente de pérdida de energía se llama radiación de Cherenkov. Esta radiación no está vinculada con ninguna aceleración, puesto que se trata de la emisión por un medio, no por una carga en movimiento, por lo que no se trató en este trabajo de tesis, pero se recomienda su estudio y análisis ya que es muy importante en el campo de la física en especial en el de altas energías, ya que su empleo es la base de los nuevos detectores de partículas rápidas y permite determinar el registro de paso, velocidad, carga de partículas, entre otras aplicaciones.

VIII. BIBLIOGRAFÍA

[1]. Levich. B. G. (1974). Curso de Física Teórica. Vol. 1. Barcelona: Ed. Reverté, S. A.

[2]. Introduction and literature survey. Recuperado de http://shodhganga.inflibnet.ac.in/bitstream/10603/5204/6/06_chapter%201.pdf

[3]. 7. Radiación de Bremsstrahlung. Recuperado de <http://www.astro.ugto.mx/cursos/RadioAstronomy/Radioastronomy-2.pdf>

[4]. Segre. E. (1970). Física Nuclear: Núcleos y Partículas. Barcelona: Ed. Reverté, S. A.

[5]. Jackson. J. D. (1980). Electrodinámica Clásica. Madrid: Ed. Alhambra, S. A.

[6]. Levich. B. G. (1976). Curso de Física Teórica. Vol. 2. Barcelona: Ed. Reverté, S. A.

[7]. Sokolov. A. A, Ternov. I. M. (1989). Electro-dinámica cuántica. URSS: Ed. Mir Moscú.

[8]. Hernández. A. (2009). Electrodinámica Clásica. Tenerife - España.

[9]. Tejeiro. J. M. (2004). Sobre la Teoría Especial de la Relatividad. Colombia.

[10]. Alcaraz. M. Tema 2 “Interacción de la Radiación con la Materia. Recuperado de http://webs.um.es/mab/miwiki/lib/exe/fetch.php?id=lecciones&cache=cache&media=lectura_2.pdf

[11]. Bremsstrahlung Radiation. Recuperado de: <http://www.astro.unipd.it/franceschini/HighEnergy/2Bremsstrahlung.pdf>

[12]. Tema 2: Sistemas experimentales: Fuentes de Radiación, Detectores y Aceleradores. Recuperado de <http://ific.uv.es/~martinee/FNyP/Tema2.%20Sistemas%20experimentales.pdf>

[13]. Bartolomé. F. La Radiación Sincrotrón en Ciencia de Materiales. Zaragoza - España Recuperado de <http://fmc.unizar.es/people/bartolom/documents/CSICdoc.pdf>

[14]. Gutiérrez. A., Gago. J. A. M., Ferrer. S. (2004). La Luz Sincrotrón: Una Herramienta Extraordinaria para la Ciencia. Apuntes de Ciencia y Tecnología N° 12. Recuperado de http://www.icmm.csic.es/grupos/wp-content/uploads/2009/02/reprint_sr_ale.pdf

[15]. Del Palacio, S. (2014). Interacción de Partículas Relativistas en Vientos Estelares. (Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional de la Plata). Recuperado de http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/40950/Documento_completo.pdf?sequence=1

[16]. Capítulo 7: Radiación de Partículas Cargadas - Interacción con la Materia. Recuperado de <http://mit.ocw.universia.net/22.105/NR/rdonlyres/Nuclear-Engineering/22-105Electromagnetic-InteractionsFall1998/5C04C29E-F9A0-42CC-B0C2-82D6D9990086/0/chap7.pdf>

[17]. Capítulo 6. Colisiones de partículas cargada. Recuperado de <http://mit.ocw.universia.net/22.105/NR/rdonlyres/Nuclear-Engineering/22-105Electromagnetic-InteractionsFall1998/55E24E9E-97CB-4734-A793-E744396F82C5/0/chap6.pdf>

APÉNDICE A

Análisis vectorial

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (A.1)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b}) \quad (A.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{a}(u) = \nabla u \cdot \frac{d\vec{a}}{du} = \nabla u \cdot \dot{\vec{a}} \quad (A.3)$$

$$\nabla \times \vec{a}(u) = \nabla u \times \frac{d\vec{a}}{du} = (\nabla u) \times \dot{\vec{a}} \quad (A.4)$$

Ecuaciones de Maxwell-Lorentz

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{H} \cdot d\vec{S} \quad (A.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (A.6)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi \vec{j}}{c} \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = \frac{4\pi}{c} \int \vec{j} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (A.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi e \quad (A.8)$$

Fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{V} \times \vec{H} \quad (A.9)$$

APÉNDICE B

Ecuaciones relativistas de la dinámica de Newton

Una generalización relativista natural de las ecuaciones de la dinámica de Newton lo son las ecuaciones

$$\frac{d\vec{p}_\alpha}{dt_0} = \frac{d}{dt_0} m \vec{u}_\alpha = \vec{F}_\alpha \quad (B.1)$$

Donde \vec{F}_α es un cierto vector de cuatro dimensiones que se llama fuerza cuatridimensional. El carácter relativísticamente invariante de la ecuación (B.1), es que figuran vectores cuatridimensionales, que en una rotación en el espacio de cuatro dimensiones (transformación de Lorentz) varían de acuerdo con la misma ley, y el escalar m no cambia.

Escribamos estas ecuaciones en términos de componentes. Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt_0} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = F_x \\ \frac{d}{dt} \frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} &= F_x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned} \quad (B.2)$$

Cuando $v \ll c$, la ecuación (B.2) debe convertirse en la ecuación ordinaria de Newton, por lo que la expresión de la derecha se iguala a:

$$F_x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = f_x \quad (B.3)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = f_x \quad (B.4)$$

Cuando $v \ll c$, (B.4) se reduce a la ecuación de Newton, y de igual manera para las otras componentes de la fuerza cuatridimensional

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = F_y \quad (B.5)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = F_z \quad (B.6)$$

Y para la componente F_t , se tiene

$$F_t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{i}{c} \vec{f} \cdot \vec{v}$$

En el segundo miembro de esta última ecuación aparece el trabajo realizado por la fuerza \vec{f} sobre la partícula por unidad de tiempo. Así, pues, la componente F_t de la 4-fuerza está vinculada con el trabajo de la fuerza tridimensional \vec{f} . Entonces la cuarta componente queda como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{icm}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} &= \frac{i}{c} \vec{f} \cdot \vec{v} \\ \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} &= \vec{f} \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (B.7)$$

En el segundo miembro de esta ecuación (B.7), el producto $\vec{f} \cdot \vec{v}$ da el trabajo de la fuerza sobre la partícula realizado en la unidad de tiempo. Por consiguiente, el primer miembro de la ecuación (B.7) debe ser la variación de energía por unidad de tiempo.

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (B.8)$$

Determinemos la expresión de la aceleración. Las ecuaciones del movimiento pueden presentarse en la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \vec{f}$$
$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{d}{dt} \varepsilon = \vec{f} \quad (B.9)$$

Despejando la aceleración de la ecuación (B.9) y reemplazando (B.7) en (B.9), se tiene

$$\vec{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{m} \left\{ \vec{f} - \frac{\vec{v}}{c^2} (\vec{f} \cdot \vec{v}) \right\} \quad (B.10)$$